**Tratto da quipo base 5**

**Introduzione all’aritmetica modulare o aritmetica dell’orologio**

**La prova del nove**

***di Andrea Becucci***

[**1. Come si fa**](http://utenti.quipo.it/base5/ricevuto/provanove.htm#c1) **1.1 per le moltiplicazioni
1.2 per le divisioni intere
1.3 per le divisioni con resto**[**2. Significato della prova**](http://utenti.quipo.it/base5/ricevuto/provanove.htm#c2) **Classi di resto modulo 9**[**3. Perché "del 9"?**](http://utenti.quipo.it/base5/ricevuto/provanove.htm#c3) **Proprietà del numero 9 nel nostro sistema di numerazione**

**Introduzione**

La finalità della prova del 9 è quella di controllare l'esatezza di una moltiplicazione tra numeri... "grandi", quando i calcoli sono fatti a mano.
Se la prova dà esito negativo, abbiamo sbagliato i calcoli ed occorre rivederli nella moltiplicazione, se dà esito positivo però non ci dà la certezza di avere in mano un risultato corretto: il nostro risultato è corretto a meno di un multiplo di 9.
Considerato che sbagliare di un multiplo di 9 una moltiplicazione è abbastanza difficile, diciamo che quando la prova torna, siamo abbastanza sicuri che quello calcolato da noi sia il risultato corretto.

Passiamo ad analizzare come si fa.

**CAPITOLO 1**

**Calcolo della prova del 9 per le moltiplicazioni**
Iniziamo a vedere come si fa con un esempio
59.714 \* 24.339 = 1.453.379.046
Sarà corretto il risultato o no? Facciamo la prova del 9.

|  |  |
| --- | --- |
|   |   |
|   |   |

Si traccia una croce e la riempiamo con i seguenti numeri:
In alto a sinistra: si sommano le cifre del primo fattore (5+9+7+1+4=26) ripetutamente, finché non resta un numero ad una sola cifra (2+6=8)

|  |  |
| --- | --- |
| 8 |   |
|   |   |

In alto a destra facciamo lo stesso procedimento con il secondo fattore (2+4+3+3+9=21 2+1+=3)

|  |  |
| --- | --- |
| 8 | 3 |
|   |   |

In basso a sinistra: si moltiplicano i 2 numeri in alto sulla croce, e si riduce il risultato ad una sola cifra, sommandone le cifre (3\*8=24 2+4=6)

|  |  |
| --- | --- |
| 8 | 3 |
| 6 |   |

Infine in basso a destra mettiamo la somma delle cifre del numero che noi crediamo sia il risultato dell'operazione (1+4+5+3+3+7+9+0+4+6=42 4+2=6)

|  |  |
| --- | --- |
| 8 | 3 |
| 6 | 6 |

Se i due numeri in basso sono uguali la prova ha esito positivo, altrimenti ha esito negativo.
Ricordiamo che se la prova ha esito negativo, la moltiplicazione è sicuramente errata, mentre se ha esito positivo, il risultato trovato da noi potrebbe differire dal risultato reale per un multiplo di 9.
Riepiloghiamo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Somma cifre primo fattore** | **Somma cifresecondo fattore** |
| **Somma cifre prodotto dei 2 numeri in alto** | **Somma cifrerisultato "ipotetico"** |

**Calcolo della prova del 9 per le divisioni intere**
Dal momento che dividendo : divisore = quoziente
Segue che divisore \* quoziente = dividendo
Per cui abbiamo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Somma cifre divisore** | **Somma cifrequoziente** |
| **Somma cifre prodotto dei 2 numeri in alto** | **Somma cifredividendo** |

**Calcolo della prova del 9 per le divisioni con resto**
Dal momento che dividendo : divisore = quoziente con resto non 0
Segue che divisore \* quoziente + resto = dividendo
Per cui abbiamo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Somma cifre divisore** | **Somma cifrequoziente** |
| **Somma cifre prodotto dei 2 numeri in alto + somma cifre resto** | **Somma cifredividendo** |

Urge un esempio:
732 : 17 = 43 con resto 1

|  |  |
| --- | --- |
| 17 1+78 | 43 4+37 |
| 7\*8=565+6=111+1=2Dunque 2 è la somma delle cifre del prodotto tra i 2 numeri in alto; a questa bisogna aggiungere il resto (1), per cui il calcolo non è ancora finito.                                             2+1=33 | 7+3+2=121+2=33 |

**CAPITOLO 2**

**Significato della prova del 9 per le moltiplicazioni**Per capire bene cosa facciamo quando facciamo la prova del 9, bisogna introdurre la "matematica dell'orologio", ovvero le classi di resto.
I numeri naturali siamo abituati a figurarceli disposti su una semiretta orientata. Possiamo immaginare di avere in mano un gran cesto contenente tutti i numeri naturali (lo so che sono infiniti, ma immaginiamocelo lo stesso) e di lasciare lo 0 alla partenza e, ad ogni passo che muoviamo sulla semiretta, lasciare il numero successivo (l'1 al primo passo, il 2 al secondo e così via.

Avremo perciò una situazione del genere:

|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|------|---------->
0.. 1... 2.... 3.... 4.... 5... 6... 7.... 8.... 9.. 10.. 11.. 12 ...

Divertiamoci a cambiare un pochino lo scenario.
Seminiamo i numeri anziché su una semiretta su un cerchio sul quale ci sono 9 scatole capienti. Nella prima scatola ci lasciamo lo 0, nella seconda l'1 e così via fino a mettere l'8 nella nona ed ultima scatola; poi continuiamo a "deporre" i numeri sempre girando in senso orario, per cui mettiamo il 9 nella scatola dove c'era già lo 0, il 10 dove c'è l'1, ecc..

Avremo perciò una situazione del genere:



Vediamo che cambiando scenario e passando dal seminare i numeri su una semiretta al seminarli su una linea chiusa, abbiamo raggruppato tutti i numeri in varie scatole: per capirsi di ogni scatola eleggiamo un "rappresentante", un "capo-squadra" che per semplicità sarà di ogni scatola il numero più piccolo.

Che cosa abbiamo nelle varie scatole?
Nella scatola dello 0 abbiamo i seguenti numeri: 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, ...
Nella scatola dell'1 abbiamo: 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, ...
Nella scatola del 2: 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, ...
.
.
.
Nella scatola dell'8: 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, ...

Un po' di osservazioni sui numeri contenuti nelle varie scatole (si potrebbe pensare di farlo fare ai bimbi: una sorta di scoperta guidata).

Nella scatola dello 0 ci sono i multipli di 9, ovvero tutti quei numeri che divisi per 9 danno resto = 0. Importante soffermarsi sul resto; in genere nella divisione siamo molto più interessati a conoscere il quoziente, mentre il resto è spesso una scomoda appendice. In questa specie di gioco con regole cambiate, noi ce ne infischieremo dei quozienti, ma saremo attentissimi al resto.
Nella scatola dell'1 ci sono tutti i numeri che divisi per 9 danno resto 1.
E così via.

**Presa una scatola a caso e presi 2 numeri a caso da essa, la differenza tra questi 2 numeri sarà sempre un multiplo di 9.!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**

**Presa una scatola a caso e pescato a caso un numero, la somma (eventualmente ripetuta) delle sue cifre darà il numero rappresentante della scatola, con la sola eccezione della scatola dello 0, in cui tutti i numeri (0 escluso) danno per somma 9.!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**
Ed ora l'addizione.
Come si fa 3+2 sulla semiretta?
Si parte dall'origine e si cammina di tanti passi quanto indicati dal primo addendo; poi ci si muove ancora del numero di passi indicati dal secondo addendo. Alla fine ci si ferma, alziamo gli occhi sul "cartello" che ci indica (in buona sostanza) quanti passi ci siamo allontanati dall'origine.

|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|------|---------->
0 ................3.......... 5
....................|----2----|

Nella matematica dell'orologio, il meccanismo è il solito: partenza dall'origine (scatola dello 0), si fanno 3 passi in senso orario e poi altri 2 e si guarda dove si arriva. Anche qui si arriva al 5.



Benissimo e come la mettiamo con 7 + 5?
La mettiamo sempre uguale, anche se il risultato potrebbe spaventarci.



**Dunque 7+5=3???**

In effetti, girando in tondo e camminando di 7 + 5 = 12 passi ci siamo allontanati da "casa" soltanto di 3 passi; poco importa se abbiamo compiuto un giro completo, questo per noi è ininfluente, l'importante è stabilire dove siamo andati a cascare.

**Ma visto che "normalmente" 7 + 5 = 12, chiediamoci in quale scatola si trova il numero 12?**

**Ma in quella di cui il 3 è degno rappresentante** (ricordiamoci dell'osservazione sulla somma dele cifre dei numeri di ogni scatola).

**Ecco che allora in qualche modo le cose cominciano ad avere un senso.**
**Che cosa abbiamo imparato da tutto ciò?**

**Sommando ripetutamente le cifre di un numero scritto nel nostro sistema di numerazione, fino a ridurlo ad un numero di una cifra soltanto, otteniamo il resto di quel numero nella sua divisione per 9 (eccezion fatta per i multipli di 9 per i quali otteniamo 9 anziché 0).**

**Conclusione**.

 **Che cosa facciamo quando facciamo la prova del 9?**

**Calcoliamo il resto della divisione per 9 del primo fattore,**

**il resto della divisione per 9 del secondo fattore,**

**moltiplichiamo questi 2 numeri**

 **e sommando le cifre del risultato,**

**otteniamo il resto ????????? della divisione per 9 che il risultato corretto deve avere.**

 **Poi calcoliamo il resto della divisione per 9 del risultato che abbiamo calcolato noi.**

59.714 \* 24.339 = 1.453.379.046

|  |  |
| --- | --- |
| 8 | 3 |
| 6 | 6 |

Giusta dunque la conclusione che se questi 2 numeri sono diversi, la moltiplicazione è errata, mentre se i numeri sono uguali, **la prova ci dice soltanto che hanno lo stesso resto nella divisione per 9, ovvero differiscono tra loro per un multiplo di 9, che noi speriamo ardentemente essere lo 0.**

**1.453.379.046 e 1.453.379.055 hanno resto 6 nella divisione per 9**

**CAPITOLO 3**

**Perché "del 9"?**

 **Abbiamo già notato che la somma delle cifre di un qualsiasi numero dia come risultato il suo resto nella divisione per 9. Ciò avviene perché nel nostro sistema di numerazione, 9 è il maggiore tra i numeri che si possono scrivere con una cifra soltanto.**

Si può osservare che

la divisione di 10 per 9 dà resto 1 (10=9+1 e 9 è divisibile per 9)

e così la divisione di 100 per 9 (100=99+1 e 99 è divisibile per 9),

di 1000 per 9 (1000=999+1), e così via.

La somma delle cifre di 10, 100, 1000, è ovviamente 1.

Ma succede sempre anche che 20, 200, 2000, ecc, hanno resto 2 nella divisione per 9? Certamente, visto che 20:9=(10+10):9=10:9+10:9 e così abbiamo resto 1 dal primo addendo, resto 1 dal secondo e il resto complessivo è proprio 1+1=2.

Dunque stesso discorso per 30, 300, 3000, ..eccetera, eccetera.
Conclusione preso un qualunque numero, possiamo determinare il suo resto nella divisione per 9 semplicemente sommando le sue cifre.

And so on

Esempio: 7483=7000+400+80+3.

Per quanto osservato sopra abbiamo resto 7 dal primo addendo, 4 dal secondo, 8 dal terzo e 3 dall'ultimo: 7+4+8+3=22. Ma un numero diviso 9 non può avere un resto maggiore di 9; questi 22 oggetti che mi sono rimasti devono ancora essere divisi per 9 e così potrò vedere quanti me ne restano. Ma allora, per determinare il resto di 22 per 9 posso sommare le cifre: 2+2=4 e questo è il resto sia di 22 sia di 7483 nella divisione per 9.

**La prova del 9 dunque viene fatta perché è molto semplice determinare il resto della divisione di un numero per 9 (basta sommare le sue cifre ripetutamente finché non resta un numero ad una sola cifra), in più "sbagliare" di un multiplo di 9 è cosa abbastanza rara.**
Fare la prova dell'8 o del 7 sarebbe estremamente più lungo e complesso, che il gioco non varrebbe la candela.