**Tratto da quipo base 5**

**Esiste un metodo semplice per calcolare "a mano" la radice quadrata di un numero?**

Ne esistono diversi, ma non si può dire che siano semplicissimi.
Il procedimento che viene ancora oggi insegnato nella scuola media è lo stesso che **Rafael Bombelli** presentò nella sua **Opera su Algebra** del 1550.

Questo **algoritmo** è difficile da ricordare soprattutto se viene imparato meccanicamente, senza capirne le motivazioni. Gli strumenti per capirlo si acquisiscono nel primo anno della scuola superiore, con lo studio del calcolo letterale e dei cosiddetti prodotti notevoli.
Gli antichi hanno faticato a lungo per costruire le tavole delle radici quadrate e i moderni hanno inventato le calcolatrici tascabili.
Se il vostro obiettivo è risolvere dei problemi allora è meglio utilizzare le tavole o la calcolatrice.
Se il vostro obiettivo è capire l'algoritmo allora questa pagina fa per voi!

**I consigli di Delfini e di Bombelli, comunque, sono e saranno sempre utili per tutti.**

**La stima iniziale**

Dato un qualunque **numero intero** è facile stimare immediatamente da quante cifre è composta **la parte intera** della sua radice quadrata e qual è la sua prima cifra.
Esempio:
la radice quadrata (Rad) di 268745 inizia per 5 ed è formata da 3 cifre.
**Rad(268745) = 5 \_ \_.**In effetti Rad(268745) = 518,406...

**Come si fa per eseguire questa stima?**Si divide il numero in gruppi di 2 cifre partendo da destra.
**26.87.45**- I gruppi sono 3 e perciò la radice quadrata ha 3 cifre.
- Il primo gruppo è 26. La radice quadrata di 26 approssimata per difetto a meno di una unità è 5 e perciò la radice quadrata del numero inizia per 5.

**Come si giustificano queste regole?**- La stima del numero di cifre deriva da una caratteristica della nostra notazione in base 10.
Se 0 < a < 10 allora 0 < a2 < 100,
Se 10 < a < 100 allora 100 < a2 < 10 000,
Se 100 < a < 1000 allora 10 000 < a2 < 1 000 000,
.
.
.
- La stima della prima cifra deriva da un ragionamento sui quadrati dei numeri da 1 a 9.
In questo caso:
52 = 25 - 62 = 36
502 = 2500 - 602 = 3600
5002 = 250000 - 6002 = 360000
.
.
.
Dato che:
250000 < 268745 < 360000
Si ha che:
500 < Rad(268745) < 600
Dunque la prima cifra è 5.

**Esercizi:**Trova la prima cifra ed il numero di cifre delle seguenti radici quadrate:
Rad(534) = Rad(5.34) = 2 \_
Rad(9876) = Rad(98.76) = 9 \_
Rad(1111111) = Rad(1.11.11.11) = 1 \_ \_ \_

**L'algoritmo**

Estraiamo la radice quadrata di 7548
- Consideriamo il numero di cui vogliamo calcolare la radice quadrata:
**7548**- Dividiamolo in gruppi di 2 cifre a partire da destra **75.48**- Possiamo subito dire che la radice è:
**Rad(75.48) = 8? + resto** (? è la seconda cifra della radice di 7548)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   | Spazio calcoli |
| **V** | **7** | **5.** | **4** | **8** | **=** | **8?** |
|   |   |   |   |   |   |    |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |

Scriviamo 8 nello spazio del risultato e 64 (=8^2) sotto il 75.
Eseguiamo quindi la sottrazione 75 - 64 e scriviamo il risultato sotto il 64.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   | Spazio calcoli |
| **V** | **7** | **5.** | **4** | **8** | **=** | **8?** |
|   | 6 | 4 |   |   |   |    |
|   | 1 | 1 |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |

Abbassiamo accanto al resto il secondo gruppo di cifre, 48.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   | Spazio calcoli |
| **V** | **7** | **5.** | **4** | **8** | **=** | **8?** |
|   | 6 | 4 |   |   |   |    |
|   | 1 | 1 | 4 | 8 |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |

Moltiplichiamo per 20 la prima cifra del risultato (8\*20=160) e la trascriviamo nello spazio calcoli, aggiungiamo un +, uno spazio, un x, uno spazio e un =.
Chiediamoci: qual è il numero n tale che (16 + n) \* n è il più vicino possibile per difetto a 1148?
Bisogna procedere per tentativi!

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   | Spazio calcoli |
| **V** | **7** | **5.** | **4** | **8** | **=** | **8?** |
|   | 6 | 4 |   |   |   | **(160 + \_ )\* \_ =** |
|   | 1 | 1 | 4 | 8 |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |

Il numero cercato è 6. E' la seconda cifra del risultato! Trascriviamolo vicino all'8!
Trascriviamolo inoltre negli spazi, eseguiamo i calcoli e trascriviamo il risultato sotto il 1148.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   | Spazio calcoli |
| **V** | **7** | **5.** | **4** | **8** | **=** | **86** |
|   | 6 | 4 |   |   |   | **(160 + 6) \* 6 = 996** |
|   | 1 | 1 | 4 | 8 |   |   |
|   |   | 9 | 9 | 6 |   |   |

Calcoliamo la differenza 1148-996 e trascriviamola sotto il 996. Questa è il resto della radice!

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   | Spazio calcoli |
| **V** | **7** | **5.** | **4** | **8** | **=** | **86** |
|   | 6 | 4 |   |   |   | **(160 + 6) \* 6 = 996** |
|   | 1 | 1 | 4 | 8 |   |   |
|   |   | 9 | 9 | 6 |   |   |
|   |   | 1 | 5 | 2 |   |   |

In conclusione:
**Rad(7548) = 86 con il resto di 152.
Ovvero 7548 = 862 + 152.**

**Un altro esempio**

Dài, su, ci ho preso gusto! Proviamo con un numero più lungo.
Estraiamo la radice quadrata di 1432542
- Consideriamo il numero di cui vogliamo calcolare la radice quadrata:
**1432542**- Dividiamolo in gruppi di 2 cifre a partire da destra **1.43.25.42**- Possiamo subito dire che la radice è:
**Rad(1.43.25.42) = 1??? + resto**

Ecco i primi due passaggi, effettuati come nel caso precedente.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   |   |
| **V** | **1.** | **4** | **3.** | **2** | **5.** | **4** | **2** | **=** | **11\_** |
|   | **1** |   |   |   |   |   |   |   | **(20 + 1) \* 1 = 21** |
|   | **0** | **4** | **3** |   |   |   |   |   |   |
|   |   | **2** | **1** |   |   |   |   |   |   |
|   |   | **2** | **2** | **2** | **5** |   |   |   |   |

Il procedimento continua ripetendo gli stessi passaggi fino ad esaurire tutte le coppie di cifre che compongono il numero di partenza.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   |   |
| **V** | **1.** | **4** | **3.** | **2** | **5.** | **4** | **2** | **=** | **1196** |
|   | **1** |   |   |   |   |   |   |   | **(20 + 1) \* 1 = 21** |
|   | **0** | **4** | **3** |   |   |   |   |   | **(220 + 9) \* 9 = 2061** |
|   |   | **2** | **1** |   |   |   |   |   | **(2380 + 6) \* 6 = 14316** |
|   |   | **2** | **2** | **2** | **5** |   |   |   |   |
|   |   | **2** | **0** | **6** | **1** |   |   |   |   |
|   |   |   | **1** | **6** | **4** | **4** | **2** |   |   |
|   |   |   | **1** | **4** | **3** | **1** | **6** |   |   |
|   |   |   |   | **2** | **1** | **2** | **6** |   |   |

Note.
Perché ho scritto 220? Perché 200 = 11\*20
Perché ho scritto 2380? Perché 2380 = 119\*20

In conclusione:
**Rad(1432542) = 1196 con il resto di 2126.
Ovvero 1432542 = 11962 + 2126.**

E se volessimo calcolare anche i decimali della radice quadrata?
Facile: dobbiamo continuare il procedimento aggiungendo due zeri alla volta. Ogni coppia di 0 aggiunti permette di trovare un decimale nella radice.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   |   |
| **V** | **1.** | **4** | **3.** | **2** | **5.** | **4** | **2** | **=** | **1196** |
|   | **1** |   |   |   |   |   |   |   | **(20 + 1) \* 1 = 21** |
|   | **0** | **4** | **3** |   |   |   |   |   | **(220 + 9) \* 9 = 2061** |
|   |   | **2** | **1** |   |   |   |   |   | **(2380 + 6) \* 6 = 14316** |
|   |   | **2** | **2** | **2** | **5** |   |   |   | **(23920 + 8) \* 8 = 191424** |
|   |   | **2** | **0** | **6** | **1** |   |   |   | **(239360 + 8) \* 8 = 1914944** |
|   |   |   | **1** | **6** | **4** | **4** | **2** |   |   |
|   |   |   | **1** | **4** | **3** | **1** | **6** |   |   |
|   |   |   |   | **2** | **1** | **2** | **6** | **0** | **0** |
|   |   |   |   | **1** | **9** | **1** | **4** | **2** | **4** |
|   |   |   |   |   | **2** | **1** | **1** | **7** | **6 0 0** |
|   |   |   |   |   | **1** | **9** | **1** | **4** | **9 4 4** |
|   |   |   |   |   |   | **2** | **0** | **2** | **6 5 6** |

**Spiegazione dell'algoritmo**

**Per capire il funzionamento dell'algoritmo sono necessari almeno due prerequisiti.**

**1) La notazione posizionale in base 10 e la scrittura dei numeri in forma polinomiale.**Noi scriviamo i numeri utilizzando il sistema posizionale in base dieci.
Quando scriviamo il numero 2358 attribuiamo un significato preciso alla **posizione** di ciascuna cifra. Siamo in grado di dire che il numero 2358 è composto da **2** migliaia, **3** centinaia, **5** decine e **8** unità.
Ogni numero intero può essere quindi scritto in una forma detta **forma polinomiale** percé si tratta di un vero e proprio polinomio.

2358 = 1000\*2+ 100\*3+ 10\*5+ 8

**2) La formula per il calcolo del quadrato di un binomio**Consideriamo il caso di un binomio.
**(a + b)2 = a2 + b2 + 2ab**

Applicando questa formula per calcolare il quadrato di un numero intero di 2 cifre scritto in forma polinomiale, si ottiene, ad esempio:

**342 = (10\*3 + 4)2 = 100\*32 + 2\*3\*4\*10 + 42 = 100\*32 + 4\*(20\*3 + 4)**

In generale:

**(10\*a + b)2 = 100\*a2 + b\*(20\*a + b)**

Detto questo, provo a spiegare l'algoritmo partendo da un esempio.

Calcoliamo la Radq(7589) = 87,11

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | **\_** | **\_** | **\_** | **\_** |   |   |
| **V** | **7** | **5.** | **8** | **9** | **=** | **87** |
|   | **6** | **4** |   |   |   | **167\*7 = 1169** |
|   | **1** | **1** | **8** | **9** |   |   |
|   | **1** | **1** | **6** | **9** |   |   |
|   |   |   | **2** | **0** |   |   |

Chiamiamo:
N = 7589 (il radicando)
G = 75 (il primo gruppo di cifre del radicando)
g = 89 (il secondo gruppo di cifre del radicando)
n = 87 (la parte intera della radice)
a = 8 (la prima cifra della radice, che si trova subito)
b = 7 (la seconda cifra della radice, che si trova in seguito)

Possiamo scrivere:
**N = 100\*G + g**(75.89 = 100\*75 + 89)

**n = 10\*a + b**(87 = 10\*8 + 7)

**N = n2 + resto**

Sostituendo:
**(1) (100\*G + g) = (10\*a + b)2 + resto**

E, in base a questa uguaglianza:
(10\*a+b)2 = 100\*a2 + b\*(20\*a+b)

Si ha che:
**(2) (100\*G + g) = 100\*a2 + b\*(20\*a + b) + resto**

Ricavando il **resto** dalla (1) e dalla (2) e uguagliando, si ha che:
**(3) (100\*G + g) - (10\*a + b)2 = (100\*[G - a2] + g) - b\*(20\*a + b)**

Ora, quando noi, nel primo passaggio, eseguiamo la sottrazione:
75 - 64 = **11**
e trasportiamo **89** accanto a **11**,
otteniamo **1189**che cosa abbiamo fatto?
**11 = G - a289 = g
1189 = (100\*[G - a2] + g)**

Quando invece cerchiamo un numero opportuno (7) e calcoliamo:
**167\*7 = 1169**in modo che il risultato (1169) minimizzi il resto,
che cosa abbiamo fatto?
**167\*7 = 7\*(160 + 7) = b\*(20\*a + b)**

Guarda caso!
**1189 - 1169 = (100\*[G - a2] + g) - b\*(20\*a + b)**
che è il nuovo resto!

Ma questo resto, per l'uguaglianza (3) è proprio uguale a:
**(100\*G + g) - (10\*a + b)2**

Cioè, risalendo alle definizioni originali, è uguale a:
**N = n2**

Concludendo!
Ripetendo questo procedimento, ad ogni passaggio otterrò una nuova cifra della radice e, **avendo minimizzato il resto**, sarò sicuro che quella è la cifra giusta!

Se il numero avesse un'altra coppia di cifre, dovrei trascriverla accanto all'ultimo resto (20) e il procedimento andrebbe avanti sostituendo:
**G con 100\*G+g
a con10\*a+b**e così via.

**I consigli di Rafael Bombelli**

**I numeri NON-QUADRATI: se li conosci li eviti**

***A conoscere li numeri quadrati per pratica.***

***"Molte volte accade nell'operare di havere a trovare il lato di un numero (= la radice quadrata), che non havendo lato, l'operante non se ne ha a servire; e assai volte accade ne i numeri grandi, poi che si è affaticato assai invano, si trova tal numero non haver lato, per non essere quadrato, e hassi gettato il tempo e l'opera; però, per fuggire questo inconveniente, ho pensato di dar certe regole che assai facilitaranno la strada a conoscere quali siano li numeri quadrati."
Rafael Bombelli, Opera su Algebra, 1550.***

Ecco alcune delle regole date da Bombelli.

* Tutti i numeri quadrati finiscono in una delle seguenti cifre: 0, 1, 4, 5, 6, 9.
* Se un numero termina in: 2, 3, 7, 8 non può essere un quadrato.
* Se si applica la prova del 9 ad un numero e il risultato è uno di questi: 1, 4, 7, 0, allora il numero non è un quadrato.
* Se un quadrato termina per 5 allora ma il 5 non è preceduto da un 2 e il due non è a sua volta preceduto da una cifra pari, allora non è un quadrato.
* Se un numero che termina in 9 oppure 1 e la penultima cifra non è un numero pari allora non è un quadrato.
* Se un numero termina in 4 ma il 4 non è perceduto da una cifra pari, allora non è un quadrato.
* Se un numero termina in 6 ma il 6 non è preceduto da una cifra dispari, allora non è un quadrato.
* Se un numero termina in 0 ma gli zeri terminali sono in numero dispari, allora non è un quadrato.

**I consigli di Enrico Delfini**

Come esponente della M.A. (matematica approssimativa), ti propongo un sistema assolutamente impreciso, ma, con un poco di pratica, molto rapido per avere un'idea del valore approssimato.
Ciò è utile, sia per "avere un'idea" del risultato, sia per controllare, una volta ottenuto quello "preciso" con i calcoli, a mano o a macchina, se il risultato è "compatibile".
Il procedimento ricalca, in modo grossolano, quello "ufficiale", ma si fa a mente, nel tempo che si impiega a scrivere il numero o a batterlo sulla tastiera.

Si contano le cifre del numero e da questo si scopre di quante cifre è composta la radice:
fino a due cifre-la radice è di una cifra;
3 o 4 cifre-la radice è di 2 cifre;
4 o 5 cifre- la radice è di 3 cifre eccetera.

Ora si guarda solo il primo gruppetto( di una o due cifre) che rimane a sinistra, una volta raggruppate tutte le cifre a due a due, iniziando da destra.

Ora bisogna individuare tra quali "quadrati perfetti" si situa questo numerino; per es. se il numero è 345.823, lo raggruppo a due a due: 34.58.23; il primo gruppetto è 34, che sta fra 25 (^2) e 36 (6^2); posso ora dire che la radice cercata è un numero di 3 cifre che comincia per 5, cioè compreso fra 500 e 599; ora per approssimazione, vedendo che 34 è molto più vicino a 36 che a 25, posso prevedere che la radice sarà più vicina a 599 che a 500; sparo un 580; il vero risultato è 588,xxx, ma col mio sistema lo posso dire prima di aver finito di scrivere; in effetti, una volta contate le cifre, dopo aver scritto le prime due, si può già sparare un valore, approssimato sì, ma mai del tutto sbagliato.